

CAPÍTULO 1

Qué es el contrato en didáctica de la matemática

1.1. Nacimiento de los estudios sobre el contrato didáctico

En el inicio de los años 70 ingresó en el mundo de la investigación en didáctica de la matemática la idea de *contrato didáctico*, propuesta por Guy Brousseau (IREM Bordeaux, 1978), idea que se reveló inmediatamente fructífera y que fue convalidada definitivamente por tres famosos estudios, dos del mismo Brousseau (1980a, 1980b) y uno de Brousseau y Pères (1981), (el célebre caso de *Gaël*, que describiremos líneas abajo).

Las reflexiones sobre los medios para realizar este proyecto comienzan con la observación de las clases entre 1972 y 1975. Estas surgen en el marco de su curso de III ciclo en 1975 y se convierten en objeto de textos difundidos a partir de 1979, publicados en 1980, y luego, con el estudio de los fracasos electivos y del “caso *Gaël*”.

La idea nació, en efecto, para estudiar las causas del fracaso electivo en matemática, es decir, aquel típico fracaso reservado solo al dominio de la matemática, por parte de los estudiantes que, más o menos, parecen..., arreglárselas con las otras materias.

Gaël es un niño que cursa el segundo año de primaria aunque tiene más de 8 años, la condición en la que los investigadores hallaron a Gaël se describe como sigue:

- en lugar de expresar conscientemente su propio conocimiento, Gaël lo expresa única y exclusivamente en términos que involucran al docente;
- sus competencias no son nunca sus propias competencias personales, sino lo que la docente le ha enseñado;
- sus capacidades estratégicas no son nunca sus propias capacidades, sino lo que (y cómo) la docente ha dicho que debe hacer.

Toda situación didáctica la vive a través del docente, solo hasta que los investigadores obtienen de él –gracias a situaciones a-didácticas–, intervenciones más personales que, finalmente, son mucho más productivas cognoscitivamente.

Fueron los estudios de la segunda mitad de los años 80 los que decretaron el triunfo y la teorización plena de esta idea; estamos pensando, por ejemplo, en trabajos del mismo Guy Brousseau (1986) y de Yves Chevallard (1988a).¹

La idea, de puro espíritu francés,² no era completamente nueva.

1 Para una presentación de la idea de contrato didáctico, véase Schubauer-Leoni (1996); para una historia bibliográfica muy bien documentada de la idea de contrato didáctico, véase Sarrazy (1995).

2 Estamos pensando en Jean-Jacques Rousseau [1712-1778] y su *Contrat social* (1762). Es interesante notar que Rousseau escribe que en un contrato no todas las cláusulas se hallan enunciadas: [ellas se hallan] «en todos lados tácitamente admitidas y reconocidas». Una cosa semejante diremos dentro de poco acerca del contrato didáctico. Y no puede no venir a la mente *El Emilio* (1762): «Que nada él sepa por haberlo oído de ustedes, sino solo por haberlo comprendido por sí mismo; que no aprenda la ciencia: que la descubra. Si en su mente ustedes logran sustituir la razón por la autoridad, no razonará más; no será más que el bufón de la opinión de los demás» (p. 215 de la ed. Fr. París, Flammarion, 1996, editado por M. Launay).

En 1973 y en 1974, Jeanine Filloux (1973, 1974) había propuesto la idea de contrato pedagógico para definir algunos tipos de relación entre docente y estudiante.³

El de Filloux era un contrato general, más social que cognitivo, mientras el contrato didáctico de Brousseau toma en cuenta, también, tanto los conocimientos en juego (cuya toma en cuenta, como veremos, es esencial para el concepto mismo de contrato didáctico) como la situación escolar. Se trata de lo siguiente:

En una situación de enseñanza, preparada y realizada por un docente, el estudiante tiene como tarea resolver el problema (matemático) que se le presenta, pero el acceso a esta tarea se hace por medio de una interpretación de las preguntas dadas, de las informaciones proporcionadas y de las obligaciones impuestas que son constantes del modo de enseñar del docente. Estos hábitos (específicos) del docente esperados por los estudiantes y los comportamientos del estudiante esperados por el docente constituyen el contrato didáctico. (Brousseau, 1980a, p. 127; véase también Schubauer-Leoni, 1996, p. 21)

A menudo estas “expectativas” no se deben a acuerdos explícitos impuestos por la escuela o por los docentes, o son concordados con los estudiantes, sino a la concepción de la escuela, de la matemática, a la repetición de modalidades. Volveremos con ejemplos sobre este tema en los apartados 1.3 y 1.4.

³ En realidad, desde nuestro punto de vista, existen trabajos de varios autores, difundidos por el mundo, que ya hacían referencia a situaciones que, revisadas hoy, se pueden de alguna manera pensar como anticipadores. En Laing (1969), un texto aparecido en traducción italiana en 1969, pero publicado originalmente tiempo antes en los E.U., se alude a problemáticas análogas (el estudiante que obra no cognitivamente sino relacionalmente, p. 187 y sig.). En Bertin (1968), en la p. 135 de la VI edic., se alude a cuestiones que hoy llamaríamos de explicación del comportamiento del estudiante con base en cláusulas del contrato didáctico. Probablemente, una investigación bibliográfica cuidadosa podría demostrar que, como muchas veces sucede en la historia de las ideas, éstas no se hallan jamás aisladas, en su nacimiento, sino que tienen diferentes ideas predecesoras diseminadas.

1.2. Ejemplos

Dada la increíble variedad de interpretaciones posibles de la idea de contrato didáctico (que explícitamente recordaremos en el apartado 1.5.), no es para nada sencillo dar ejemplos. Nos limitaremos por lo tanto a proporcionar unos cuantos tomándolos de la bibliografía, pero advirtiendo que se trata de ejemplos de niveles muy diferentes entre ellos, seleccionados precisamente para dar la idea de la enorme variedad con la que hoy en día se hace referencia a la idea de contrato didáctico. Es precisamente gracias a esta variedad que esperamos englobar todo lo que hoy pasa bajo esta denominación. Los primeros tres ejemplos son de carácter general y, desde nuestro punto de vista, mucho más cercanos al “contrato social” que al “contrato didáctico”.

- **Ejemplo 1** (ligado a la concepción de la escuela, por lo que se halla más cerca del contrato “social” que del “didáctico”). El estudiante considera que la escuela es directiva y exclusivamente calificadora. Es decir, el único fin de la escuela es el de evaluar el rendimiento y capacidad de los estudiantes; por lo que, aunque el docente pida al estudiante escribir *libremente* lo que piensa, por ejemplo acerca de las alturas de un triángulo, el estudiante considera que tiene que hacerlo usando un lenguaje lo más riguroso posible, porque supone que bajo ese pedido existe, de cualquier modo, una prueba, un control. Por lo que no escribirá para nada “libremente” sino que, en cambio, buscará dar la definición que considera ser la correcta, es decir, la que cree que el docente espera. Normalmente, en esta situación, el estudiante usará un lenguaje lacónico y con sintaxis complicada, que tenderá a tener como modelo el lenguaje del libro de texto, el del docente en clase o el de sus compañeros más exitosos, por lo que se reduce a una repetición de enunciados, de definiciones, de reglas a seguir.

- **Ejemplo 2** (ligado a la concepción de la matemática y por lo tanto relativo a un “contrato” más general que el didáctico). El estudiante considera que en matemática se deben hacer cálculos; por lo que, aunque la respuesta a la pregunta propuesta en un problema podría darse solo respondiendo con palabras, el estudiante se siente incómodo y tiende a hacer uso de los datos numéricos presentes en el texto del problema, para dar de cualquier forma una respuesta formal, usando alguna operación, aunque elegida casualmente. Han sido ampliamente documentados casos de estudiantes que, con tal de producir cálculos, escriben operaciones sin sentido, desligadas de los requerimientos del problema, pero que tienen como operadores los datos numéricos presentes en el texto.
- **Ejemplo 3** (ligado a la repetición de modalidades, por así decirlo, “sociales”). Durante tres lunes consecutivos el docente de matemática pide a los estudiantes resolver ejercicios en el tablero; de ahí en adelante el estudiante sabe que todos los lunes será así, una modificación al programa esperado genera sorpresa. Lo mismo vale, por ejemplo, en cuanto a la expectativa de los temas posibles en una prueba de evaluación; si el docente siempre ha hecho únicamente preguntas acerca del programa desarrollado en las últimas clases, no puede, según el estudiante, hacer preguntas sobre argumentos vistos en clase de un pasado más remoto...

El estudio de los diferentes fenómenos de comportamiento de los estudiantes desde este punto de vista ha dado resultados de sumo interés. Hoy, muchos comportamientos considerados hasta hace poco tiempo como inexplicables o ligados al desinterés, a la ignorancia, a la incapacidad lógica o la edad inmadura, han sido clarificados; en la base de esta problemática existen motivaciones mucho más complejas e interesantes.⁴

4 El lector puede hallar otros ejemplos significativos en Polo, 1999.

Uno de los estudios más notables es el que se conoce con el nombre de *la edad del capitán*, puesto en evidencia de una manera bastante difundida a través de un libro con ese título, de la psicóloga francesa Stella Baruk en 1985. Aquél libro fue, en realidad, precedido por un célebre estudio publicado en 1980 en Grenoble (IREM Grenoble, 1980) y por un vasto y largo debate acerca de tal resultado y sus interpretaciones. Contaremos en las líneas sucesivas en qué consiste, pero de una forma un poco más personal, tal como lo hemos vivido directamente (D'Amore, 1993b).

En una clase de 4º grado de primaria compuesta por estudiantes de 9-10 años de edad de un importante centro agrícola, hemos propuesto el muy célebre problema (en el cual el capitán se convierte en un pastor):⁵ «Un pastor tiene 12 ovejas y 6 cabras. ¿Cuántos años tiene el pastor?». En coro, con seguridad, todos los niños sin excepción y sin ninguna reserva, dieron la respuesta esperada: «18». Frente a la aflicción de la docente, reaccionamos explicándole que se trata de un hecho ligado al contrato didáctico: ella nunca había propuesto problemas sin solución o problemas imposibles (en alguna de las tantas formas de imposibilidad),⁶ por lo que los niños habían, por decirlo de una manera simplista, introducido en el contrato didáctico una cláusula (de confianza en el docente, y de imagen de la matemática) del tipo: «Si la docente nos da un problema, ciertamente debe poder resolverse».

Los estudios conducidos por el IREM de Grenoble motivaron a Adda (1987) a acuñar la expresión *efecto edad del capitán* para «designar la conducta de un estudiante que calcula la respuesta de un problema utilizando una parte o la totalidad de los números que se han proporcionado en el enunciado, cuando este problema no tenga una solución numérica» (Sarrazy, 1995).

Tal efecto forma parte de los llamados de *ruptura del contrato didáctico* (Brousseau, 1988; Chevallard, 1988a): si el estudiante se da cuenta de lo absurdo del problema

5 Esta "transformación" se halla también sugerida en Brissiaud (1988).

6 Sobre este argumento, véase D'Amore y Sandri (1993).

propuesto, necesita hacerse cargo personalmente de una ruptura del contrato didáctico, para poder contestar que el problema no se puede resolver. En efecto, esta nueva situación contrasta con todas sus expectativas, con todos sus hábitos, con todas las cláusulas puestas en el ámbito de las situaciones didácticas.

El contrato es necesario para dar esperanza, pero es ilusorio.

Este será fatalmente roto: el saber no es lo que se puede suponer antes. El aprendizaje lleva a una renuncia de lo que se creía antes, a lo que la ignorancia hacía suponer. En realidad aquí se insertan al menos otras dos problemáticas conectadas entre sí y vinculadas con el contrato didáctico, pero autónomas, que trataremos de describir rápidamente.

La primera la decimos siguiendo las palabras y las preguntas que se plantean Perret-Clermont, Schubauer-Leoni y Trognon (1992):

Frente a los enunciados de problemas, los estudiantes se han [...] acostumbrado a no poner en discusión la legitimidad o la pertinencia de las preguntas del docente, y eso les permite por otra parte funcionar más económicamente teniendo 'de manera natural' confianza en el adulto. De acuerdo con esta lógica todo problema tiene solución y además una solución ligada a los datos presentes en el enunciado. Frente a un problema que no tiene solución, ¿Cómo se comportará el estudiante? Confrontado por la costumbre constantemente repetida de un "contrato didáctico" según el cual el docente no tiene como objetivo 'engañar' al estudiante poniéndole un problema sin solución, el estudiante que cree haber descubierto un fraude en la pregunta del docente, ¿Denunciará la ruptura del pacto en nombre de la lógica del problema? o ¿Asumirá sobre sí [sic] mismo la ruptura del contrato, dando en todo caso una respuesta, cueste lo que cueste, aunque sabe desde el inicio que no es correcta o que por lo menos es dudosa? Ahora, el estudio del comportamiento del estudiante frente a problemas a los cuales no se puede dar una respuesta tiene ya una historia en sí misma y una bibliografía inmensa (sobre algún aspecto de

esto regresaremos dentro de poco). Aquí era interesante ver el aspecto que liga: las expectativas del estudiante, sus costumbres convertidas en cláusulas del contrato didáctico y la propuesta de un problema imposible, estudiadas por medio del recurso al contrato didáctico.

La segunda problemática se refiere en cambio, más en general, a los modelos conceptuales de “problema” que se hacen los estudiantes. Fundamental con respecto a lo anterior es el largo estudio de Rosetta Zan (1991-1992) realizado con niños de primaria, y al cual haremos referencia.⁷ En primer lugar, parece evidente que los niños distinguen el problema real, concreto, el ligado a la vida extra-escolar, del problema escolar: saben que cuando se dice *problema* en la escuela durante la clase de matemática, no se refiere a problemas reales, sino a problemas artificiales, prefabricados, con todas sus características ya codificadas. Además: «para la mayoría, el problema se caracteriza por medio del tipo de procedimiento que se usa para la solución: es decir se define implícitamente por la necesidad de realizar operaciones» (Zan, 1991-1992), como bien saben todos los docentes del mundo.

Por lo tanto, lo que caracteriza al problema es la operación que se necesita realizar para resolverlo, agregando elementos estructurales (una situación, algunos datos numéricos que caracterizan la situación) y algunos elementos variables (el tipo de situación, los protagonistas, los objetos).

De lo anterior «emerge [...] en modo inequívoco que el problema escolar es para los niños el problema aritmético: ¡solo 2 niños de (grado) quinto (de 123) llevan un ejemplo alternativo, en particular un ejemplo geométrico!» (Zan, 1991-1992).

Es de sumo interés para nuestros objetivos ver cuáles son las respuestas de los niños a la pregunta sobre cuáles son los comportamientos que se deben poner en acto durante la resolución de un problema escolar: «En este punto las indicaciones de los niños son unánimes: se necesita leer y

⁷ Este largo artículo es importante, no solo por su contenido, sino también por la rica y abundante bibliografía sobre el argumento específico. Véase también D'Amore (2014).

releer el texto, razonar, estar tranquilos y trabajar por sí solos» (Zan, 1991-1992); las respuestas revelan normas explícitas de un contrato comportamental, evidentemente requeridas (trabajar por sí solos) o sugeridas (leer y releer el texto) por los docentes.

Se ve cómo todo el mundo de la resolución de problemas se halla cubierto tanto de cláusulas normativas de los contratos didácticos o pedagógicos (las normas y las solicitudes) como de cláusulas implícitas, no dichas por el docente, sino creadas poco a poco por los estudiantes sobre la base de recurrencias que han llevado a modelos generales de problema, lo que constituye condicionamientos insuperables.

Quizás conviene decir aquí explícitamente que, con base en lo visto hasta ahora, el contrato didáctico no es una realidad estable, estática, establecida de una vez por todas; al contrario, se trata de una realidad en evolución (Chevallard, 1988a, especialmente de la p. 33 en adelante) que se acompaña de *la historia de la clase*.⁸

También queremos hacer notar que existe una contradicción entre expectativas y declaraciones explícitas de los estudiantes. Muchos estudiantes declaran que el objetivo por el cual el docente da un problema para resolver es el de verificar si los estudiantes saben razonar, como se atestigua en el estudio de Zan (1991-1992); pero después el problema se identifica con su resolución. Valga para todos la respuesta seca que ha dado un niño cuando, impaciente por los requerimientos acerca del razonamiento seguido, declaró con extrema sinceridad: «Lo importante no es entender sino resolver el problema» (hemos recogido este testimonio con un detallado comentario en D'Amore, 1996b).

En el mismo artículo recordábamos otra situación, en la cual, después de haber dado un problema del tipo “edad del pastor”, revelábamos a los niños que tal problema no podía resolverse, se suscitaba así la reacción de uno de ellos: «Ah, pero así no vale. Cuando el problema no se puede resolver, la docente nos lo dice. Nos lo debías decir también tú».

⁸ Sobre muchos de los temas aquí tratados de manera rápida, véase D'Amore (1993a, 2014).

Parece lícito hacer varios comentarios.

Por un lado, he aquí otro ejemplo de cláusula no explícita sino creada por la usanza, por el hábito, por la costumbre. «Cuando les doy un problema que no se puede resolver, les advierto, así ponen particular atención», parece haber sugerido (quizás explícitamente) el docente a los niños de este grupo. Eso elimina cualquier factor educativo vinculado a proponer problemas imposibles. Si el docente hubiera incluso solo dicho: «Les advierto que este problema no se puede resolver; a ustedes les pregunto el por qué», habría sido ya otra situación, más educativa.

Otro comentario podría hacerse acerca del sentido que tiene la actividad didáctica de dar en clase problemas de este tipo. Si el objetivo es el de mejorar la calidad de la atención crítica y de la lectura consciente, asegurándose de que: (a) no se instaure el dogmático y restrictivo modelo general de problema evidenciado en el trabajo de Zan (1991-1992); y (b) no se instauren cláusulas no deseadas del contrato didáctico, que podrían ser nocivas;

entonces, advertir a los estudiantes en cada ocasión falsea el objetivo y anula el resultado. Lo ideal es una advertencia general preliminar, si acaso explícita, pero no específica de vez en vez: es decir el estudiante debe saber que le pueden proponer problemas imposibles para resolver y por lo tanto debe saber que será mejor tener los ojos abiertos en cada ocasión.

Resulta espontáneo introducir aquí una nota didáctico-curricular: en programas ministeriales italianos del año 1985 para la escuela primaria italiana se podía leer una invitación explícita a los docentes para que plantearan a los estudiantes problemas en los que faltaran datos, que tuvieran datos de más o que tuvieran datos contradictorios. No se trataba de una maldad fraguada por un burócrata obtuso o insensible, sino de una solicitud para eliminar precisamente estas cláusulas nocivas del contrato didáctico y aquellas ideas malsanas acerca de los problemas escolares: como se sabe, los niños por lo general ni siquiera leen el texto de un problema, sino que se limitan a recorrerlo rápidamente, con-

centrándose en los datos numéricos y buscando intuir el tipo de operación necesario (sobre este punto existe una amplia bibliografía, por ejemplo la reportada en D'Amore, 1993a). Pero si los estudiantes se comportan así, algo o alguien debe haberlos inducido a este comportamiento... Existen cláusulas nocivas del contrato didáctico que escaparon al control crítico adulto y que, es más, parecen a veces explícitas.

Hay dos interesantes observaciones por hacer:

1. Los *mismos* niños, en un contexto diferente al de la clase, a la misma propuesta de problema, no dan ya necesariamente la misma respuesta, sino que ponen en evidencia la incongruencia entre los datos y el requerimiento.
2. Los estudiantes de un grupo *diferente*, en los cuales el docente ha propuesto varias veces a los estudiantes problemas de este tipo, están acostumbrados a estar vigilantes; saben que cuando el docente da un problema para resolver, se necesita analizar bien el texto. En el caso de "el problema del pastor", los niños contestaron, después de varias sonrisas e intercambios de miradas furtivas entre ellos, con frase irónicas, evidenciando que el problema, tal cual era formulado, no se podía resolver.

Quizás vale la pena observar, de paso, que estas cláusulas y este modelo general de problema forman parte del bagaje cultural del niño también antes de la edad escolar, cuando asisten al preescolar, como hemos probado con una investigación empírica (Baldisserri et al., 1993). (Para todas las cuestiones didácticas concretas ligadas a los problemas en la escuela primaria, en las que aquí no entramos en detalle, remitimos a D'Amore, 1993a, y Martelli et al., 1993).

Para cerrar este apartado, recordamos aún el efecto "edad del capitán" que se puede pensar como una cláusula del contrato didáctico según la cual los datos numéricos presentes en el texto deben tomarse *todos* (mejor *una y*

solo una vez y posiblemente en el orden en que aparecen) (Chevallard, 1988a, especialmente en las pp. 12-13).⁹

Esto explica el por qué los niños frente a problemas del tipo “del pastor” o “del capitán” no tienen otra posibilidad, ninguna salida: deben contestar usando los datos numéricos. Así, en la prueba del pastor a la que aludimos líneas arriba, los niños sintieron la necesidad de usar los datos numéricos 12 y 6. El único desconcierto era, tal vez, en la elección de la operación por realizar. Ahora, puede ser que la de la adición haya sido una elección casual; pero debe decirse que un niño particularmente vivaz, a nuestra petición de explicar por qué no hizo uso, por ejemplo, de la división, después de un instante de reflexión, explicó: «¡No, es demasiado pequeño!», refiriéndose obviamente a la edad del pastor... Esto quiere decir que una especie de control semántico existe, vigilante: ¿existirá también de manera implícita una especie de control de la coherencia entre todos los elementos en juego? ¿Puede un pastor tener solo 2 años?

Queremos también recordar otra respuesta bastante difundida y que va en la misma dirección; a la pregunta: ¿Cómo razonaste? (o semejantes), algunos niños responden que el pastor tiene 18 años porque desde que nació le regalaron un animal. Se trata, siempre, de dar coherencia a la situación, en el sentido precisado varias veces precedentemente.

Queremos también recordar que la bibliografía internacional acerca de los problemas imposibles es hoy muy rica. Tanto para tener indicaciones metodológicas, como bibliográficas, sugerimos Schubauer-Leoni y Ntamakiliro (1994).

⁹ Por otro lado, este hecho ha sido evidenciado muchas veces por muchos investigadores del mundo entero.

1.3. Más ejemplos y reflexiones acerca del contrato didáctico

En D'Amore (1993a) es relatada una curiosa experiencia. Consideremos el siguiente texto:

Los 18 estudiantes de segundo año quieren hacer una excursión escolar de un día de Bologna a Verona. Deben tomar en cuenta los siguientes datos; 1. Dos de ellos no pueden pagar; 2. De Bologna a Verona hay 120 km; 3. Un autobús para 20 personas cuesta 200.000 liras al día más 500 liras por kilómetro (incluyendo los peajes). ¿Cuánto gastará cada uno?

Inútil decir que se trata de un problema complejo, que se quería efectuar realmente la programación de una excursión, que los estudiantes tendrían que haber discutido el problema y buscado la solución en grupo, etcétera. De hecho, la gran mayoría de los estudiantes, frente a la solución de este problema, por sí mismos cometían un error de manera recurrente: al calcular el gasto de los kilómetros recorridos, multiplicaban 500 por 120, sin tomar en cuenta el regreso. Sobre este punto existe una vasta bibliografía que tiende a justificar este hecho. Una de las justificaciones más recurrentes es una especie de olvido estratégico o afectivo: la ida a una excursión es emotivamente un momento fuerte, el regreso, por el contrario, no lo es tanto.

Para buscar entender mejor la cuestión fragmentamos el problema en varias componentes o fases, con tantas "preguntitas" parciales específicas, pero el error se repetía. Sugerimos entonces a algunos docentes representar las escenas de la ida y del regreso y dibujar los diferentes momentos de la excursión. El caso increíble que encontramos y que se describe en D'Amore (1993a) es el de un niño que dibujó un autobús y debajo de este una doble flecha: en que escribió: «Bologna - Verona 120 km», en la otra «Verona - Bologna 120 km», por lo que existe perfecta consciencia del hecho de que en una excursión existe una ida y un regreso;

pero después el mismo niño, al momento de resolver, utiliza de nuevo solo el dato para la ida.

De este problema se han ocupado Castro, Locatello y Meloni (1996). Ellos han verificado cómo los niños no se sienten autorizados a usar un dato que no aparece en el texto. Encontraron niños que, en entrevistas sucesivas a la ejecución del test, puestos frente a la problemática del cálculo del gasto del regreso, afirmaron «... pero si tú querías también el regreso debías escribirlo», «el regreso no me pasó por la cabeza, no existe en el texto una frase para el regreso, era mejor ponerla»; muchos hablan de los datos, de los números: «Para resolver se deben usar los números del problema» (es decir los datos que aparecen explícitamente en el texto) (Castro, Locatello & Meloni, 1996). El análisis hecho por estos Autores es muy detallado y a este remito a quien estuviera interesado; me interesa poner en evidencia otra consideración que surge de estos estudios sobre el contrato didáctico: cuenta poco el sentido de lo pedido, lo que cuenta es hacer uso de los datos numéricos explícitamente propuestos como tales.

En este sentido se puede leer el comportamiento de los estudiantes frente a un célebre problema de Alan Schoenfeld (1987a): «Un autobús del ejercito transporta 36 soldados. Si 1128 soldados deben transportarse en autobús al campo de entrenamiento, ¿Cuántos autobuses deben usarse?». Es bien conocido que de los 45000 estudiantes de quince años estudiados por Schoenfeld, solo menos de un cuarto (el 23%) logró dar la respuesta esperada: 32. El objetivo declarado por el autor en este artículo era discutir sobre metacognición (tema sobre el cual regresaremos más adelante).

A distancia de varios años quisimos analizar de nuevo la misma situación (D'Amore & Martini, 1997) y hallamos algunas novedades. La prueba se desarrolló en varios niveles escolares, dando la libertad a los estudiantes de usar o no la calculadora. Tuvimos muchas respuestas del tipo: 31.333333 sobre todo por parte de quien usaba la calculadora; otras respuestas fueron: $31,\bar{3}$ y 31.3. El control semántico, cuando existe, lleva a algunos a escribir 31 (los autobuses «no se

pueden partir»), pero muy pocos se sienten *autorizados* a escribir 32.

Nuestro trabajo es complejo, porque analiza varias cuestiones. Pero aquí solo queremos evidenciar algunas cláusulas de contrato didáctico:

El estudiante no se siente autorizado a escribir lo que no aparece: si incluso hace un control semántico acerca de los autobuses como objetos no divisibles en partes, eso no lo autoriza a escribir 32; existe incluso quien no se siente autorizado ¡ni siquiera a escribir 31! No se puede hablar simplemente de “error” por parte del estudiante, a menos que no se entienda por este la incapacidad de controlar, una vez obtenida la respuesta, si es semánticamente coherente con la pregunta propuesta; pero entonces se activa otro mecanismo: el estudiante no está dispuesto a admitir el haber cometido un error y prefiere hablar de un “truco”, de una “trampa”; para el estudiante un error matemático o en matemática, es un error de cálculo o asimilable a un error de cálculo, no de tipo semántico.

Una cláusula del contrato didáctico que entra en juego es la que llamamos: de *delegación formal*; el estudiante lee el texto, decide que la operación a efectuar es la división y que los números con los cuales debe operar son, en ese orden, 1128 y 36; a este punto aparece la cláusula de la delegación formal: ya no le corresponde al estudiante razonar y controlar; sea que haga los cálculos a mano, tanto más si se hace uso de la calculadora, se instaura la cláusula de delegación formal que lleva al estudiante a desentenderse de las facultades racionales, críticas, de control: el empeño del estudiante se terminó y ahora es responsabilidad del algoritmo o mejor aún de la máquina; la tarea sucesiva del estudiante será la de transcribir el resultado, cualquier cosa sea y sin importar lo que esta signifique.

Por otra parte, que el estudiante no tenga interés en controlar las incoherencias internas de su propia operatoria ha sido ya muchas veces puesto en evidencia por la

investigación internacional; véanse al respecto los trabajos de Schoenfeld (1985), Tirosh (1990), Tsamir y Tirosh (1997), D'Amore y Martini (1998).

1.4. Un ulterior ejemplo

Estudios profundos acerca del contrato didáctico han permitido revelar precisamente que los niños y los jóvenes tienen expectativas particulares, esquemas generales, comportamientos que nada tienen que ver en estricto sentido con la matemática, pero que dependen del contrato didáctico instaurado en clase.

Veamos un ulterior ejemplo, aún relativo a una investigación sobre los problemas con falta de datos y sobre las actitudes de los estudiantes frente a problemas de este tipo (D'Amore & Sandri, 1988). Se presenta un texto propuesto en 3° grado de escuela primaria (estudiantes de 8-9 años) y en 7° grado (estudiantes de 12-13 años): «Giovanna y Paola van al mercado; Giovanna gasta 10000 liras y Paola gasta 20000 liras. Al final ¿Quién tiene más dinero en la bolsa, Giovanna o Paola?».

He aquí un prototipo del patrón de respuestas más difundidas en 3° grado de primaria; escogemos el protocolo de respuesta de Stefania, que citamos exactamente como lo redactó la estudiante:

Stefanía:

En la bolsa le queda más dinero a Giovanna

$$30 - 10 = 20$$

$$10 \times 10 = 100$$

La respuesta «Giovanna» (58.4% de tales respuestas en 3° grado de escuela primaria) se justifica por el hecho que (como ya hemos abundantemente ilustrado) el estudiante considera que, si el docente da un problema, *debe poderse resolver*, por lo que, aunque se debiese dar cuenta que falta el dato de la cantidad inicial, se lo inventa *implícitamente* como sigue: «Este problema *debe* poder resolverse; por lo

que, quizás Giovanna y Paola salieron con la misma cantidad». En ese caso *la respuesta es correcta*: Giovanna gasta menos y por lo tanto le queda más dinero, y eso justifica la primera parte escrita (en palabras) de la respuesta de Stefania. Después de esto se activa otro mecanismo ligado a otra cláusula (del tipo: imagen de la matemática, expectativas presupuestas por parte del docente): «No puede bastar esto, en matemática se debe siempre calcular, la docente lo espera de seguro». A ese punto, el control crítico fracasa y, como hemos visto, cualquier cálculo está bien...

Hemos llamado a esta cláusula del contrato didáctico: *exigencia de la justificación formal* (EJF), estudiándola en varios detalles.

Tal cláusula Ejf se manifiesta frecuentemente también en la escuela secundaria (de 6° a 8° grado). El porcentaje de respuestas «Giovanna» baja del 58.4% (de 3° grado de escuela primaria) al 24.4% (7° grado); pero solo el 63.5% de los estudiantes de 7° grado revela en algún modo la imposibilidad de dar una respuesta; por lo que el 36.5% da una respuesta: más de la tercera parte de cada grupo.

He aquí un prototipo de respuesta dada al mismo problema en 7° grado; seleccionamos el protocolo de respuesta de una estudiante, reportándolo exactamente como la produjo.

Silvia:

Para mí, quien tiene más dinero en la bolsa es Giovanna
[después corregido a Paola]

Porque:

Giovanna gasta 10.000 mientras que Paola gasta 20.000

10.000	20.00
Giovanna	Paola
$20000 - 10000 = 10000$	$10000 + 10000 = 20000$
dinero de Giovanna	dinero de Paola

En el protocolo de Silvia se reconocen en acción las mismas cláusulas del contrato didáctico puestas en marcha en el protocolo de Stefania, pero su análisis es más complejo. En primer lugar, se nota un intento de organización lógica y formal más elaborado. Silvia al inicio escribe «Giovanna» porque razonó como Stefania; pero, después, a causa de la cláusula de EJF, considera tener que producir cálculos; es probable que Silvia se dé cuenta, aunque en modo confuso, que las operaciones que está haciendo se hallan desligadas del problema, las hace solo porque considera tener que hacer algún cálculo. Pero, por cuanto absurdas, termina con asumir tales operaciones como si fueran plausibles; tan es así que, dado que de estos cálculos insensatos obtiene un resultado que contrasta con el dado de forma intuitiva, a este punto prefiere violentar su propia intuición y acepta lo que obtuvo por «vía formal». Los cálculos le dan «Paola» como respuesta y no «Giovanna», como había intuitivamente supuesto al inicio; y por lo tanto cancela «Giovanna» y en su lugar escribe «Paola». No solo la nociva cláusula del contrato didáctico, sobre todo la cláusula EJF, sino también una imagen formal (vacía, nociva) de la matemática ha ganado, derrotando la razón.

Desde nuestro punto de vista este ejemplo se revela más bien interesante, en su sencillez, porque en las respuestas dadas por los estudiantes son evidentes, incluso, los signos de la costumbre que se citaba anteriormente (Balacheff, 1988a).

1.5. Diferentes acercamientos a la idea de contrato didáctico

Podemos pensar el contrato didáctico como un conjunto de reglas con verdaderas y propias *cláusulas*, la mayoría de las veces no explícitas y muchas veces –incluso–, no realmente existentes, sino creadas por las mentes de los personajes involucrados en la acción didáctica, para volver coherente un modelo de escuela, o de vida escolar, o de saber. Estas cláusulas organizan las relaciones entre el contenido

enseñado, los estudiantes, el docente y las expectativas (generales o específicas), en el interior del grupo en las clases de matemática.

Otra forma de ver las cosas, también, para comprender mejor los vínculos entre docente, estudiante y saber, nos la ofrece Chevallard (1988b):

Concretamente, docente y estudiantes se hallan juntos (al inicio del año) alrededor de un saber precisamente establecido (por el programa anual). Contrato de enseñanza (que obliga al docente), contrato de aprendizaje (que obliga al estudiante), se sabe que el contrato didáctico “obliga” también al saber: está aquí todo el tema de la transposición didáctica del saber que he ya desarrollado en otro momento.¹⁰ Además y sobre todo, las cláusulas del contrato organizan las relaciones que estudiantes y docente establecen con el saber. El contrato regula detalladamente la cuestión. Toda noción enseñada, toda tarea propuesta se halla sometida a su legislación.

Ahora, con el pasar de los años, el contrato didáctico, a partir de su idea original, ha sido más y más veces reinterpretado por varios autores, a veces, como declara también Sarrazy (1995), con modalidades y acercamientos incluso muy diferentes entre ellas; algunos de ellos, debe decirse que son más bien diferentes de la idea original, pero forman ahora parte de la literatura.

Podemos distinguir una *aproximación antropológica*, en la cual «el contrato didáctico se considera muchas veces como un acto simbólico por medio del cual el niño se convierte en sujeto didáctico al interior de la institución escolar» (Sarrazy, 1995).¹¹ Esta aproximación tiene como válido exponente a Chevallard, el cual escribe (1988b) que «el primer contrato didáctico es un contrato social, el origen del cual se sitúa en el proyecto social de enseñanza» y por lo tanto llama en causa no solo al estudiante, al docente y a la institución,

¹⁰ Y aquí Chevallard cita a Chevallard (1985)

¹¹ Es quizás este acercamiento el que entre todos se reconduce mayormente a las anticipaciones de Filloux.

sino también al saber por enseñar. Sobre este punto fundamental insiste mucho también Blanchard-Laville (1989): «El contrato didáctico no es un contrato pedagógico general. Éste depende estrictamente de los conocimientos en juego».

La necesidad de hallar no solo intersecciones comunes sino también diferencias específicas entre contrato didáctico y contrato pedagógico, ha impulsado a formular las ideas de meta-contrato y de costumbre, hábito, usanza (*coutume*).

El meta-contrato se define como «el conjunto de las cláusulas que administran, en un dado campo, toda adhesión a un contrato y que aseguran su eficacia, sin importar cuáles son los contenidos particulares» (Chevallard, 1988a, p. 58).

Dicho en otras palabras, se trata de identificar lo que «más allá de las rupturas de contratos sucesivos y de sus contenidos específicos, quedaba sin variación y permitía la progresión didáctica» (Sarrazy, 1995).¹²

El hábito fue introducido por Balacheff (1988a) a propósito de un estudio sobre una idea extremadamente difundida entre los estudiantes (se trata en modo específico de lo siguiente: entre más grande es un triángulo, más grande es la suma de las amplitudes de sus ángulos internos). Al examinar las variaciones en la negociación sobre el contrato didáctico en una actividad vinculada a la discusión sobre tal idea, Balacheff afirma haber notado en el grupo, en el que había explicitado las reglas de funcionamiento social, que tales reglas parecían derivar de un orden más profundo y más permanente de las ligadas al contrato didáctico como si existiese un hábito, es decir «un conjunto de prácticas obligatorias [...] de manera de actuar establecida por el uso; la mayor parte de las veces implícitamente» (Balacheff, 1988a, p. 21).

Esta idea tiene gran relevancia porque explica la estabilidad que se puede observar en clase, cuando se cambian contratos (por ejemplo si se pasa de situaciones didácticas

¹² Es de sumo interés, desde este punto de vista, la situación didáctica descrita en Sarrazy (1995); en la descripción de tal situación se tiene un muy claro ejemplo de meta-interpretación por parte del estudiante de la tarea propuesta por un docente. A las preguntas del docente relativas a la tarea, el estudiante responde no resolviendo la tarea que tiene en mente el docente, sino interpretando las motivaciones que empujaron al docente a poner las preguntas de una determinada forma.

a situaciones a-didácticas) o si se cambian algunas cláusulas del contrato.

Señalamos ahora lo que Sarrazy llama una *aproximación del contrato didáctico hacia la ingeniería didáctica*. Por ingeniería didáctica se entiende un «medio de acción sobre el sistema de enseñanza, como una metodología de investigación» (Sarrazy, 1995). En este sentido «la ingeniería didáctica se constituye como una metodología de investigación que se aplica tanto a los productos de enseñanza basados o derivados de ella; como a la metodología de investigación para guiar las experimentaciones en clase» (Farfán Márquez, 1997, p. 13).

Este acercamiento el contrato didáctico parece tender a ser un medio para integrar las acciones del docente al análisis didáctico (Douady, Artigue & Comiti, 1987).

Distinguimos ahora un *acercamiento psicosociológico del contrato didáctico*; se usa remitir este tipo de estudios a Brossard (1981), quien observó cómo existían ciertos estudiantes más hábiles en decodificar las intenciones del docente, anticipando con mayor eficacia sus preguntas. Esto ha incitado a análisis diferenciales del contrato, a acentuar los procesos inter e intra-individuales de la adquisición de los conocimientos, buscando integrar:

- el papel del *sujeto* en la situación de interacción (Drozda-Senkowska, 1992);
- la naturaleza del *objeto* mismo sobre el cual se basa la interacción (Schubauer-Leoni, 1986, 1988a, 1988b, 1989);
- el *contexto* de la interacción (entendido como lugar físico o simbólico) (Krummehuer, 1988).

Distinguimos ahora una aproximación al contrato didáctico a través de *paradigma etnográfico*. Tal acercamiento se ocupa de los hechos que suceden en actividades didácticas, tal «como aparecen, por ellos mismos, buscando describirlos, entenderlos, confrontarlos y explicarlos, sin basar en ellos un juicio normativo y sin pensar necesariamente en la aplicación» (Erny, 1991).

El salón de clase se ve, entonces, como un lugar de acciones y relaciones, una de las cuales es aprender, pero no es la única. Es entonces necesario que el estudiante aprenda –sí-, pero sobre todo que aprenda su «oficio de estudiante» (Sirota, 1993; Perrenoud, 1994). Nos hallamos en pleno ambiente etnográfico: las relaciones entre análisis, conducidas en este tipo de ambiente, y el contrato didáctico se hallan evidenciadas por Coulon (1988) y Marchive (1995). Aún en las múltiples diferencias en este tipo de acercamiento entre los diferentes autores (subrayadas con abundancia de particulares por Sarrazy, 1995), la constante es que el estudiante se considera un actor que participa en la interpretación de la cultura y que vive y determina el contexto en el cual actúa.

Esto nos lleva a tomar en gran consideración, en este acercamiento, el así llamado currículum oculto y su divergencia con respecto al currículum prescrito en la práctica didáctica (Perrenoud, 1988, 1994).¹³

Además de los estudios en los cuales el contrato didáctico se refiere al saber, el docente y el grupo entendidos en su *colectivo*, existen autores que han examinado contratos, por así decirlo, *individuales*. Supongamos que identificamos una dificultad escolar en la siguiente motivación: hay una diferencia entre las expectativas implícitas del docente y el comportamiento de los estudiantes, de un determinado estudiante; estando así las cosas, bastaría explicitar a este solo estudiante las expectativas que el docente tiene sobre él, el comportamiento que se espera que él siga:

«Es indispensable por lo tanto sustituir aquí, al contrato tácito y único que ligaba al docente con todo el grupo, por los contratos individuales y diversificados que comprometen a cada estudiante, precisando exactamente lo que esperamos

13 También sobre el concepto de currículum oculto existen varias interpretaciones. La primaria consiste en el conjunto de pseudo-reglas o de los pseudo-conceptos elaborados por los estudiantes, sus malentendidos a partir de las reglas y de los conceptos comunicados por el docente y no del todo comprendidos. Pero la idea original consistía en aprendizajes de tipo meta, clandestinos, específicos de una dada comunidad – clase (aprender a esperar antes de contestar; valorar las respuestas de los demás...) que no son cláusulas de un contrato explícito. Preferimos no entrar demasiado en detalles y remitir a Perrenoud (1994).

de ellos y las ayudas con las que pueden contar» (Meirieu, 1985, p. 156).

Algunos de los estudios en este sector, han llevado a desarrollar una especie de guías metacognitivas (Cauzinille-Marmeche & Weil-Barais, 1989; Paour, 1988; Colomb, 1991; Peltier, Bia & Maréchal, 1995).

Lo que queríamos presentar tanto en los ejemplos de los párrafos precedentes como en el rápido e incompleto carrusel contenido en este apartado, era un panorama de las increíbles diferencias y de la enorme variedad que se encuentra hoy en día en la literatura el término “contrato didáctico”. Desde nuestro punto de vista, un investigador que busca servirse de este instrumento debe cumplir una elección terminológica, en un cierto sentido debe tomar una posición, declarando explícitamente a qué significado se refiere cuando usa este término. Para poder hacer esta elección, obviamente, se necesita conocer las diferentes gradaciones semánticas posibles.

1.6. El contrato experimental

Los estudios sobre el contrato didáctico, prácticamente cultivados en todo el mundo, se están revelando muy fructíferos y han dado, en muy pocos años, resultados de gran interés que cada vez más nos están haciendo conocer la epistemología del aprendizaje matemático.

Cuando se habla de contrato didáctico, en realidad, como hemos visto, se debe hablar también de una situación de clase, de un particular argumento matemático, objeto del contrato; en resumidas cuentas, de una interacción entre estudiante, docente y, precisamente, objeto del saber.

Pero cuando un investigador hace investigación en el aula, en los hechos se tiene una modificación sustancial de todo el aparato. ¿Quién nos asegura que las respuestas de los estudiantes se deben aún considerar fruto de cláusulas del contrato didáctico? Dado que cambiaron las condiciones, es indiscutible que se trata de una situación del

todo diferente. Ciertamente, se tiende a suponer que el estudiante identifica de cualquier forma al investigador con un adulto de la... categoría de los docentes, pero esto no basta.

Las respuestas de los estudiantes al experimentador, tanto más si el objeto matemático no es objeto estándar de clase, parecen más ligadas a cláusulas de un *contrato experimental* que no al de un contrato didáctico, aunque parece obvio que existen vínculos muy fuertes entre las dos cosas.

Incluso, es necesario decir que no siempre se requiere que el experimentador sea una persona del todo externa al grupo. No se excluye que el docente se presente al grupo con un papel momentáneo no de docente, sino de investigador, declarando explícitamente que la actividad sucesiva tiene como objeto no una evaluación, sino una investigación.

Una situación similar es más que posible en varios países, y en particular en Italia, donde cada vez más se difunde la figura del docente-investigador (por ejemplo los docentes que forman parte de los Núcleos de Investigación Didáctica de los departamentos de matemática de las universidades), cuando estos hacen investigación con su propio grupo de clase.

Por lo tanto, el contrato experimental puede instaurarse incluso cuando la situación de clase, vista desde el exterior, parece ser la usual, mientras que en cambio no lo es del todo, por explícito que sea el requerimiento del docente.

Este tipo de problemática ha sido puesta en evidencia por María Luísa Schubauer-Leoni que sobre este punto ha dedicado fructíferos estudios (Schubauer-Leoni, 1988b, 1989; Schubauer-Leoni & Ntamakiliro, 1994). Tomamos prestado un largo y claro fragmento del artículo de 1994:

En un contexto de investigación como aquel representado por un cara a cara entre el experimentador y el estudiante a propósito de la resolución de un problema, la comunicación que se establece entre los dos seres humanos de frente se hace en el respeto (o en la ruptura) de ciertas reglas tácitas cuyas características principales y perennes reconducen [...] a los principios de pertinencia, de coherencia, de reciprocidad y de influencia [...]. Algunas de tales reglas de

carácter general se hallan en obra al mismo tiempo tanto en un marco de contrato didáctico como en uno de contrato experimental. [...] En efecto se ha insistido en otros lados [...] sobre el hecho que la diferenciación entre contrato didáctico y contrato experimental se halla esencialmente en las intenciones y en las finalidades tácitas atribuidas a la situación por parte del actor que se halla en la posición alta (el experimentador o el docente). En lo que respecta al estudiante, éste tendría la tendencia a reconducirle significado a las reglas del contrato didáctico del cual tiene una experiencia en lo cotidiano y eso aunque el adulto que tiene en frente haya previamente construido su preguntar como relevante en un contrato experimental [...]. El estudio del funcionamiento del estudiante en situación experimental se revela por lo tanto particularmente delicado dado que se trata de identificar los significados atribuidos por el estudiante y por el experimentador en función de los contratos a los cuales cada uno se refiere tácitamente. Es así posible que en ciertos casos se asista a malentendidos que residen esencialmente en la no coincidencia de los mundos de referencia de cada uno. Por lo que el estudio de lo que sucede en el contexto de una sesión experimental debe poder explicar la articulación entre las reglas del contrato experimental así como fueron puestas en obra por el experimentador y la reglas del contrato didáctico transportadas, por otra parte, por la práctica escolar, tal cual fueron importadas a la sesión por parte del estudiante.

En Schubauer-Leoni (1997a), la autora evidencia las razones de un contrato de comunicación, llamando en causa tanto la pragmática psicosocial como la pragmática de la comunicación.

A nuestro juicio, este es uno de los campos de investigación futura que se delinearán entre los más productivos. Es probable que todos nosotros debamos revisar con detalle los protocolos de nuestras investigaciones pasadas a la luz de esta nueva característica. También podrían aparecer interesantes novedades en las interpretaciones de los resultados. Nos remitimos a los trabajos mencionados para profundizaciones.

Referencias bibliográficas

- Adda, J. (1987). Erreurs provoquées par la représentations. Actas CIEAEM. Sherbrooke: Universidad de Sherbrooke.
- Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume: deux registres des interactions didactiques. En: Laborde C. (ed.) (1988). *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactiques des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 15-26.
- Baldisserri, F., D'Amore, B., Fascinelli, E., Fiori, M., Gastaldelli, B., & Golinelli, P. (1993). I palloncini di Greta. Atteggiamenti spontanei in situazioni di risoluzione di problemi aritmetici in età prescolare. *La matematica e la sua didattica*, 4, 444-451. *Infanzia*, 1, 31-34. [Publicado también en: Gagatsis A. (ed.) (1994). 239-246 en griego, 571-578 en francés. Publicado también en: *Cahiers de didactique des mathématiques*, 16-17, 1995, 11-20 en griego, 93-102 en francés].
- Bednarz, N., & Garnier, C. (eds.) (1989). *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Ottawa: Agence d'Arc.
- Bergeron, J. C., Herscovics, N. & Kieran, C. (eds.) (1987). *Proceedings of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal: PME.
- Bertin, G.M. (1968). *Educazione alla ragione*. Roma: Armando.
- Blanchard-Laville, C. (1989). Questions à la didactique des mathématiques. *Revue française de pédagogie*. 89, 63-70.
- Brissiaud, R. (1988). De l'âge du capitaine à l'âge du berger. Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2? *Revue française de pédagogie*. 82, 23-31.
- Brossard, M. (1981). Situations et significations: approche des situations scolaires d'interlocutions. *Revue de phonétique appliquée*. 57, 13-20.
- Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*, 101(3-4), 107-131.
- Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*. 41, 177-182.
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract. *Proceedings of the TME* 54.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

- Brousseau, G. (1988). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*, 21, 47-68.
- Brousseau, G., & Pères, J. (1981). *Le cas Gaël*. Bordeaux: Université de Bordeaux I, Irem.
- Castro, C., Locatello, S., & Meloni, G. (1996). Il problema della gita. Uso dei dati impliciti nei problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 166-184.
- Cauzinille-Marmeche, E., & Weil-Barais, A. (1989). Quelques causes possibles d'échec en mathématiques et en sciences physiques. *Psychologie française*, 34(4), 277-283.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1988a). *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*. Irem d'Aix-Marseille. 14.
- Chevallard, Y. (1988b). L'univers didactique et ses objets: fonctionnement et dysfonctionnement. *Interactions didactiques*. Ginevra-Neuchâtel. 9-37.
- Colomb, J. (ed.) (1991). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*. Paris: Hatier-INRP-ERMEL.
- Coulon, A. (1988). Ethnométhodologie et éducation. *Revue française de pédagogie*, 82, 65-101.
- D'Amore, B. (1993a). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996. [Edición en idioma español: Madrid: Síntesis, 1996].
- D'Amore, B. (1993b). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, 2, 14-16.
- D'Amore, B. (ed.) (1996a). *Convegno del decennale*. Actas del homónimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (1996b). Immagini mentali, lingua comune e comportamenti attesi, nella risoluzione dei problemi. *La matematica e la sua didattica*, 4, 424-439. [Publicado en idioma inglés en: D'Amore B., Gagatsis A. (eds.) (1997). *Didactics of Mathematics - Technology in Education*. Thessaloniki: Erasmus. 11-24].
- D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prologos de Gérard Vergnaud y de Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versión impresa y versión e-book].
- D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La*

- matematica e la sua didattica*. 2, 150-175. [Publicado en idioma francés en: *Scientia paedagogica experimentalis*. XXXV, 1, 95-118].
- D'Amore, B., & Martini, B. (1998). Il "contesto naturale". Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 21A, 3, 209-234.
- D'Amore, B., & Sandri, P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*. 3, 348-353. [Nuevamente publicado en: Gagatsis A. (ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Thessaloniki: Erasmus. (en griego) 247-252, (en francés) 579-584].
- D'Amore, B., & Sandri, P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18. [Publicado en idioma francés en: *Scientia paedagogica experimentalis*. XXXV, 1, 55-94].
- Douady, R., Artigue, M., & Comiti C. (1987). L'ingénierie didactique, un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité d'une classe. En: Bergeron J.C., Herscovics N., Kieran C. (eds.) (1987). *Proceedings of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal: PME. 222-228.
- Drozda-Senkowska, E. (1992). Qui pense le mieux? Les biais cognitifs dans le fonctionnement des groupes. *Bulletin de psychologie*. 45(405), 264-271.
- Erny, P. (1991). *Éthnologie de l'éducation*. Paris: L'Harmattan.
- Farfán Márquez, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Filloux, J. (1973). *Positions de l'enseignant et de l'enseigné. Fantasma et formation*. Paris: Dunod.
- Filloux, J. (1974). *Du contrat pédagogique*. Paris: Dunod.
- Gagatsis, A. (ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Thessaloniki: Erasmus.
- Gallo, E., Giacardi, L., & Roero, C.S. (eds.) (1996). *Conferenze e seminari 1995-1996*. Associazione Subalpina Mathesis - Seminario di Storia delle Matematiche "T. Viola". Torino.
- Huberman, M. (ed.) (1988). *Assurer la réussite des apprentisages scolaires*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.
- IREM Bordeaux (1978). Étude de l'influence de l'interprétation des activités didactiques sur les échecs électifs de l'enfant en mathématiques. Project de Recherche CNRS, Enseignement élémentaire des mathématiques, Cahier de l'IREM de Bordeaux I. 18, 170-181.

- IREM Grenoble (1980). Quel est l'âge du capitaine? *Bulletin de l'APMEP*. 323, 235-243.
- Krummehuer, G. (1988). Structures microsociologiques des situations d'enseignement en mathématiques. In: Laborde C. (ed.) (1988). *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactiques des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 41-51.
- Laborde, C. (ed.) (1988). *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactiques des mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Laing, R.D. (1969). *L'io e gli altri. Psicopatologia dei processi interattivi*. Firenze: Sansoni.
- Marchive, A. (1995). *L'entraide entre élèves à l'école élémentaire: relations d'aide et interaction pédagogiques entre pairs dans six classes trois*. Thèse d'État, Univ. de Bordeaux II.
- Martelli, A., Montanari, G., Pasotti, P., Rambaldi, M. T., & Sandri, P. (1993). *I problemi nella pratica didattica*. Milano: Angeli.
- Meirieu, P. (1985). *L'école mode d'emploi: des méthodes actives à la pédagogie différenciée*. Paris: ESF.
- Paour, J. L. (1988). Quelques principes fondateurs de l'éducation cognitive. *Intéactions didactiques*. Univ. de Neuchâtel. 8, 45-62.
- Peltier, M.-L., Bia, J., & Maréchal, C. (1995). *Le nouvel objectif calcul*. Paris: Hatier.
- Perrenoud, P. (1984). *La fabrication de l'excellence scolaire*. Genève: Droz.
- Perrenoud, P. (1988). La pédagogie de maîtrise. En: Huberman M. (ed.) (1988). 198-234.
- Perrenoud, P. (1994). *Métier d'élève et sens du travail scolaire*. Paris: ESF.
- Perret-Clermont, A.-N., Nicolet M. (eds.) (1988). *Interagir et connaître*. Cousset: Delval.
- Perret-Clermont A.-N., Schubauer-Leoni, M. L., & Trognon, A. (1992). L'extorsion des réponses en situation asymétrique. *Verbum (Conversations adulte/enfants)*. 1/2, 3-32.
- Polo, M. (1999). Il contratto didattico come strumento di lettura della pratica didattica con la matematica. *L'educazione matematica*, 20(6), 1, 4-15.
- Rousseau, J. J. (1966). *Émile ou de l'éducation* (a cura di M. Launay). Paris: Flammarion. [I ed. 1762].

- Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, 112, 85-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 1998, 2, 132-175].
- Sarrazy, B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique: rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes arithmétiques au cycle trois*. Tesis de doctorado en Ciencias de la Educación, Univ. de Bordeaux II.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1987a). What's all the fuss about metacognition? En: Schoenfeld A.H. (ed.) (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass. 189-215.
- Schoenfeld, A.H. (ed.) (1987b). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1986). *Maître-élève-savoir: analyse psycho-sociale du jeu et des enjeux de la relation didactique*. Tesis de doctorado en Psychologie de l'éducation, Genève.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1988a). Le contract didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement. *Interactions didactiques*. Univ. de Neuchâtel. 8, 63-75.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1988b). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée. En: Perret-Clermont A.-N., Nicolet M. (eds.) (1988). *Interagir et connaître*. Cousset, Delval. 251-264.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. En: Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Ottawa, Agence d'Arc. 350-363.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1996). Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento. En: Gallo E., Giacardi L., Roero C.S. (eds.) (1996). *Conferenze e seminari 1995-1996*. Associazione Subalpina Mathesis - Seminario di Storia delle Matematiche "T. Viola", Torino. 21-32.
- Schubauer-Leoni, M. L. (1997a). Entre théories du sujet et théories des conditions de possibilité du didactique: quel «cognitif»? *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(1), 7-27.

- Schubauer-Leoni, M.L., & Ntamakiro, L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des sciences de l'éducation*, 20(1), 87-113.
- Sirota, R. (1993). Le métier d'élève. *Revue française de pédagogie*. 104, 85-108.
- Tirosh D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on the learning problems in mathematics*. 12, 111-129.
- Tsamir, P., & Tirosh, D. (1997). Metacognition e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica*. 2, 122-131.
- Zan, R. (1991-1992). I modelli concettuali di "problema" nei bambini della scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. En 3 partes: I: 1991, 14, 7, 659-677; II: 1991, 14, 9, 807-840; III: 1992, 15, 1, 39-53.